



Fonction réciproque

Fonction bijective

Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} .

La fonction f est une bijection de I sur J si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- ✓ pour tout x de I , le réel $f(x)$ appartient à J
- ✓ pour tout réel y de J , l'équation $f(x) = y$ admet une seule solution x dans I .

Théorèmes :

1. Si f est continue et strictement croissante sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Si $I = [a, b]$ alors $f(I) = [f(a), f(b)]$	Si $I = [a, +\infty[$ alors $f(I) = \left[f(a), \lim_{+\infty} f \right[$
Si $I =]a, b]$ alors $f(I) = \left] \lim_{a^+} f, f(b) \right]$	Si $I =]a, +\infty[$ alors $f(I) = \left] \lim_{a^+} f, \lim_{+\infty} f \right[$
Si $I = [a, b[$ alors $f(I) = \left[f(a), \lim_{b^-} f \right[$	Si $I =]-\infty, b]$ alors $f(I) = \left] \lim_{-\infty} f, f(b) \right]$
Si $I =]a, b[$ alors $f(I) = \left] \lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f \right[$	Si $I =]-\infty, b[$ alors $f(I) = \left] \lim_{-\infty} f, \lim_{b^-} f \right[$

2. Si f est continue et strictement décroissante sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Si $I = [a, b]$ alors $f(I) = [f(b), f(a)]$	Si $I = [a, +\infty[$ alors $f(I) = \left] \lim_{+\infty} f, f(a) \right]$
Si $I = [a, b[$ alors $f(I) = \left] \lim_{b^-} f, f(a) \right]$	Si $I =]a, +\infty[$ alors $f(I) = \left] \lim_{+\infty} f, \lim_{a^+} f \right[$
Si $I =]a, b]$ alors $f(I) = \left[f(b), \lim_{a^+} f \right[$	Si $I =]-\infty, b]$ alors $f(I) = \left[f(b), \lim_{-\infty} f \right]$
Si $I =]a, b[$ alors $f(I) = \left] \lim_{b^-} f, \lim_{a^+} f \right[$	Si $I =]-\infty, b[$ alors $f(I) = \left] \lim_{b^-} f, \lim_{-\infty} f \right[$

Fonction réciproque

Si f est une fonction continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I de \mathbb{R} , alors :

- ✓ f est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.
- ✓ la fonction réciproque f^{-1} de f est continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur l'intervalle $f(I)$.



Fonction réciproque

$$\checkmark \quad \begin{cases} x \in I \\ f(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in f(I) \\ f^{-1}(y) = x \end{cases}$$

✓ Pour tout x de I , $(f^{-1} \circ f)(x) = x$; pour tout x de $f(I)$, $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

✓ Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à $\Delta : y = x$ dans un repère orthonormé du plan.

Dérivée d'une composée

La fonction f est dérivable sur un intervalle I et la fonction g est dérivable sur un intervalle J inclus dans $f(I)$ alors la fonction

$g \circ f$ est dérivable sur I , et on a : pour tout x de I , $(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$.

Dérivée de la fonction réciproque

Soit f une bijection de I sur $f(I)$.

Si f est dérivable sur I et pour tout x de I , $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a : pour tout y de $f(I)$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, où $y = f(x)$.